

به نام خدا

نمونه سوالات درس

ریاضی عمومی ۱

رشته های

مهندسی عمران، برق و کامپیوتر

گروه ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی واحد اصفهان

برای حل مسائل بیشتر به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال، تألیف توماس، ترجمه آقایان خادمی و مجلسی، جلد اول
قسمت دوم مراجعه نمایید.

پیدا کردن مقدار میانگین

در تمرین‌های ۵۵ تا ۶۲، تابع را رسم کرده و مقدار میانگین آن را روی بازه داده شده پیدا کنید.

۵۵. $f(x) = x^2 - 1$ روی $[0, \sqrt{3}]$

۵۶. $f(x) = -\frac{x^2}{2}$ روی $[0, 2]$

۵۷. $f(x) = -3x^2 - 1$ روی $[0, 1]$

۵۸. $f(x) = 3x^2 - 3$ روی $[0, 1]$

۵۹. $f(t) = (t-1)^2$ روی $[0, 2]$

۶۰. $f(t) = t^2 - 1$ روی $[-2, 1]$

۶۱. $g(x) = |x| - 1$ روی (الف) $[-1, 1]$ (ب) $[1, 3]$ (ج) $[-1, 3]$

۶۲. $h(x) = -|x|$ روی (الف) $[-1, 0]$ (ب) $[0, 1]$ (ج) $[-1, 1]$

مشتق از انتگرال‌ها

در تمرین‌های ۲۹ تا ۳۲ مشتق‌ها را پیدا کنید.

(الف) با محاسبه انتگرال و مشتق‌گیری از جواب

(ب) با مشتق‌گیری مستقیم از انتگرال.

۲۹. $\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, dt$ ۳۰. $\frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} 3t^2 \, dt$

۳۱. $\frac{d}{dt} \int_0^t \sqrt{u} \, du$ ۳۲. $\frac{d}{d\theta} \int_0^{\tan \theta} \sec^2 y \, dy$

در تمرین‌های ۳۳ تا ۴۰، dy/dx را پیدا کنید.

۳۳. $y = \int_0^x \sqrt{1+t^2} \, dt$ ۳۴. $y = \int_1^x \frac{1}{t} \, dt, x > 0$

۳۵. $y = \int_{\sqrt{x}}^0 \sin(t^2) \, dt$ ۳۶. $y = x \int_{\sqrt{x}}^x \sin(t^2) \, dt$

۳۷. $y = \int_{-1}^x \frac{t^2}{t^2+4} \, dt - \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t^2}{t^2+4} \, dt$

۳۸. $y = \left(\int_0^x (t^3+1)^{10} \, dt \right)^3$ ۳۹. $y = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, |x| < \frac{\pi}{2}$

۴۰. $y = \int_{\tan x}^0 \frac{dt}{1+t^2}$

مساحت

در تمرین‌های ۴۱ تا ۴۴، مساحت ناحیه بین منحنی و محور x روی بازه داده شده را پیدا کنید.

۴۱. $y = -x^2 - 2x, -3 \leq x \leq 2$

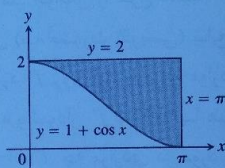
۴۲. $y = 3x^2 - 3, -2 \leq x \leq 2$

۴۳. $y = x^3 - 3x^2 + 2x, 0 \leq x \leq 2$

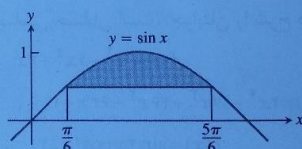
۴۴. $y = x^{1/3} - x, -1 \leq x \leq 8$

مساحت نواحی سایه‌دار در تمرین‌های ۴۵ تا ۴۸ را پیدا کنید.

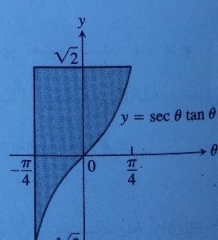
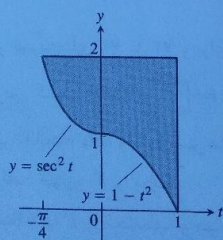
۴۵



۴۶



۴۷



$$\int \left(1 - \cos \frac{t}{\sqrt{y}}\right)^{\sqrt{y}} \sin \frac{t}{\sqrt{y}} dt, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{\sqrt{y}} \quad .10$$

$$\int \frac{9r^{\sqrt{r}} dr}{\sqrt{1-r^{\sqrt{r}}}}, \quad u = 1 - r^{\sqrt{r}} \quad .11$$

$$\int 12(y^{\sqrt{y}} + 4y^{\sqrt{y}} + 1)^{\sqrt{y}} (y^{\sqrt{y}} + 2y) dy, \quad u = y^{\sqrt{y}} + 4y^{\sqrt{y}} + 1 \quad .12$$

$$\int \sqrt{x} \sin x^{\sqrt{x}} (x^{\sqrt{x}/2} - 1) dx, \quad u = x^{\sqrt{x}/2} - 1 \quad .13$$

$$\int (1/x^{\sqrt{x}}) \cos^{\sqrt{x}}(1/x) dx, \quad u = -1/x \quad .14$$

۱۵. از الف) $u = \cot 2\theta$ و ب) $u = \csc 2\theta$ استفاده کنید.

$$\int \csc^{\sqrt{2}} 2\theta \cot 2\theta d\theta$$

۱۶. از الف) $u = \sqrt{\Delta x + 8}$ و ب) $u = \Delta x + 8$ استفاده کنید.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\Delta x + 8}}$$

در تمرین های ۱۷ تا ۵۰، انتگرال های داده شده را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{\Delta s + 4}} ds \quad .18$$

$$\int \sqrt{3-2s} ds \quad .17$$

$$\int 2y\sqrt{4-3y^{\sqrt{y}}} dy \quad .20$$

$$\int \theta^{\sqrt{\theta}} \sqrt{1-\theta^{\sqrt{\theta}}} d\theta \quad .19$$

$$\int \cos(2z+4) dz \quad .22$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^{\sqrt{x}}} dx \quad .21$$

$$\int \tan^{\sqrt{x}} x \sec^{\sqrt{x}} x dx \quad .24$$

$$\int \sec^{\sqrt{x}}(2x+2) dx \quad .23$$

$$\int \tan^{\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}} \sec^{\sqrt{x}} \frac{x}{\sqrt{x}} dx \quad .26$$

$$\int \sin^{\Delta} \frac{x}{\sqrt{x}} \cos^{\frac{x}{\sqrt{x}}} dx \quad .25$$

$$\int r^{\sqrt{r}} (\sqrt{r} - (r^{\Delta}/10))^{\sqrt{r}} dr \quad .28$$

$$\int r^{\sqrt{r}} ((r^{\sqrt{r}}/18) - 1)^{\Delta} dr \quad .27$$

$$\int \csc\left(\frac{v-\pi}{\sqrt{v}}\right) \cot\left(\frac{v-\pi}{\sqrt{v}}\right) dv \quad .30$$

$$\int x^{1/\sqrt{x}} \sin(x^{\sqrt{x}/2} + 1) dx \quad .29$$

$$\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}} dz \quad .32$$

$$\int \frac{\sin(\sqrt{t}+1)}{\cos^{\sqrt{t}}(\sqrt{t}+1)} dt \quad .31$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(\sqrt{t}+2) dt \quad .34$$

$$\int \frac{1}{t^{\sqrt{t}}} \cos\left(\frac{1}{t}-1\right) dt \quad .33$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta} \sin^{\sqrt{\theta}} \sqrt{\theta}} d\theta \quad .36$$

$$\int \frac{1}{\theta^{\sqrt{\theta}}} \sin \frac{1}{\theta} \cos \frac{1}{\theta} d\theta \quad .35$$

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x^{\Delta}}} dx \quad .38$$

$$\int t^{\sqrt{t}} (1+t^{\sqrt{t}})^{\sqrt{t}} dt \quad .37$$

$$\int \frac{1}{x^{\sqrt{x}}} \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}}-1}{x^{\Delta}}} dx \quad .40$$

$$\int \frac{1}{x^{\sqrt{x}}} \sqrt{2-\frac{1}{x}} dx \quad .39$$

$$\int \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}}}{x^{\sqrt{x}}-1}} dx \quad .42$$

$$\int \sqrt{\frac{x^{\sqrt{x}}-3}{x^{11}}} dx \quad .41$$

$$\int x\sqrt{4-x} dx \quad .44$$

$$\int x(x-1)^{10} dx \quad .43$$

$$\int (x+5)(x-5)^{1/\sqrt{x}} dx \quad .46$$

$$\int (x+1)^{\sqrt{x}} (1-x)^{\Delta} dx \quad .45$$

$$\int 3x^{\Delta} \sqrt{x^{\sqrt{x}}+1} dx \quad .48$$

$$\int x^{\sqrt{x}} \sqrt{x^{\sqrt{x}}+1} dx \quad .47$$

$$\int \frac{x}{(x-4)^{\sqrt{x}}} dx \quad .50$$

$$\int \frac{x}{(x^{\sqrt{x}}-4)^{\sqrt{x}}} dx \quad .49$$

تمرین های ۵.۵

محاسبه انتگرال های نامعین

در تمرین ۱ تا ۱۶ با استفاده از جایگزین های داده شده انتگرال های زیر را به صورت استاندارد تبدیل کرده و آن ها را محاسبه کنید.

$$\int 2(2x+4)^{\Delta} dx, \quad u = 2x+4 \quad .1$$

$$\int \sqrt{7x-1} dx, \quad u = 7x-1 \quad .2$$

$$\int 2x(x^{\sqrt{x}}+5)^{-\sqrt{x}} dx, \quad u = x^{\sqrt{x}}+5 \quad .3$$

$$\int \frac{4x^{\sqrt{x}}}{(x^{\sqrt{x}}+1)^{\sqrt{x}}} dx, \quad u = x^{\sqrt{x}}+1 \quad .4$$

$$\int (2x+2)(2x^{\sqrt{x}}+4x)^{\sqrt{x}} dx, \quad u = 2x^{\sqrt{x}}+4x \quad .5$$

$$\int \frac{(1+\sqrt{x})^{1/\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \quad u = 1+\sqrt{x} \quad .6$$

$$\int \sin 2x dx, \quad u = 2x \quad .7$$

$$\int x \sin(2x^{\sqrt{x}}) dx, \quad u = 2x^{\sqrt{x}} \quad .8$$

$$\int \sec 2t \tan 2t dt, \quad u = 2t \quad .9$$

مساحت ناحیه برابر است با

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [f(y) - g(y)] dy = \int_0^2 (y + 2 - y^2) dy \\ &= \int_0^2 (2 + y - y^2) dy \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

این همان جواب مثال ۵ است که در اینجا با کار کمتری به دست آوردیم. ■

تمرین های ۶.۵

محاسبه انتگرال های معین

با استفاده از فرمول جایگزینی در قضیه ۷، انتگرال های داده شده در تمرین های ۱ تا ۲۴ را محاسبه کنید.

۱. الف) $\int_0^3 \sqrt{y+1} dy$ ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1} dy$

۲. الف) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2} dr$ ب) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2} dr$

۳. الف) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx$ ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x dx$

۴. الف) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3 \cos^2 x \sin x dx$ ب) $\int_{\pi}^{2\pi} 3 \cos^2 x \sin x dx$

۵. الف) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^2 dt$ ب) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^2 dt$

۶. الف) $\int_0^{\sqrt{v}} t(t^2+1)^{1/2} dt$ ب) $\int_{-\sqrt{v}}^0 t(t^2+1)^{1/2} dt$

۷. الف) $\int_{-1}^1 \frac{\delta r}{(4+r^2)^2} dr$ ب) $\int_0^1 \frac{\delta r}{(4+r^2)^2} dr$

۸. الف) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} dv$ ب) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} dv$

۹. الف) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ ب) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$

۱۰. الف) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$ ب) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx$

۱۱. الف) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos^3 t) \sin^3 t dt$

ب) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos^3 t) \sin^3 t dt$

۱۲. الف) $\int_{-\pi/2}^0 \left(2 + \tan \frac{t}{2} \right) \sec^2 \frac{t}{2} dt$

ب) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 + \tan \frac{t}{2} \right) \sec^2 \frac{t}{2} dt$

۱۳. الف) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} dz$ ب) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} dz$

۱۴. الف) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2} dw$

ب) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2} dw$

۱۵. $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t} (\delta t^4+2) dt$ ۱۶. $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

۱۷. $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta d\theta$

۱۸. $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5 \left(\frac{\theta}{6} \right) \sec^2 \left(\frac{\theta}{6} \right) d\theta$

۱۹. $\int_0^{\pi} \delta (\delta - 4 \cos t)^{1/4} \sin t dt$

۲۰. $\int_0^{\pi/4} (1 - \sin 2t)^{3/2} \cos 2t dt$

۲۱. $\int_0^1 (4y - y^2 + 4y^3 + 1)^{-2/3} (12y^2 - 2y + 4) dy$

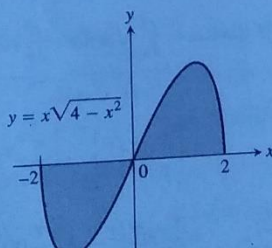
۲۲. $\int_0^1 (y^3 + 6y^2 - 12y + 9)^{-1/2} (y^2 + 4y - 4) dy$

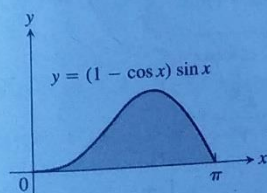
۲۳. $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sqrt{\theta} \cos^2(\theta^{3/2}) d\theta$

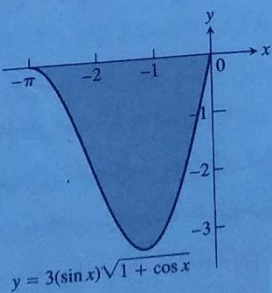
۲۴. $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2} \sin^2 \left(1 + \frac{1}{t} \right) dt$

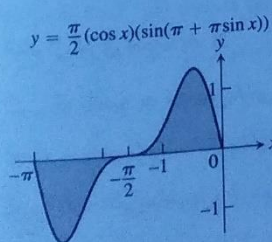
مساحت

در تمرین های ۲۵ تا ۴۰ مساحت ناحیه های سایه دار را پیدا کنید.

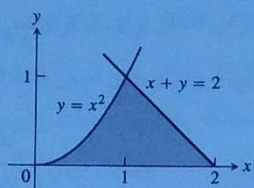
۲۵. 

۲۶. 

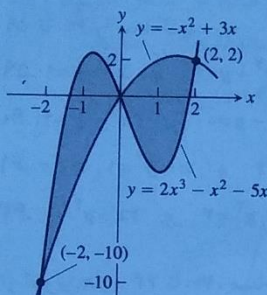
۲۷. 

۲۸. 

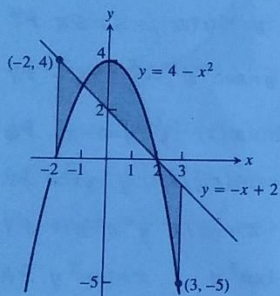
۳۶



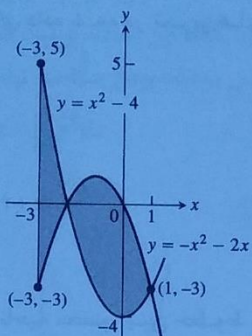
۳۸



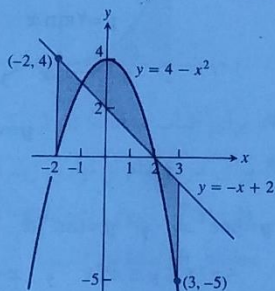
۴۰



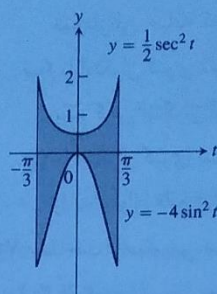
۳۷



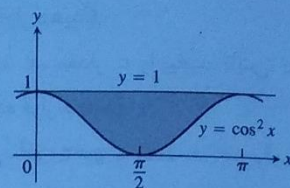
۳۹



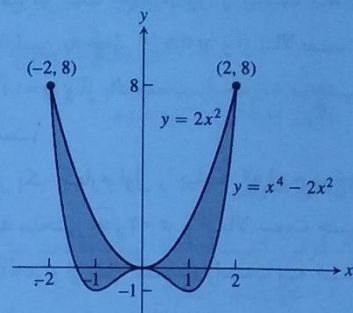
۳۰



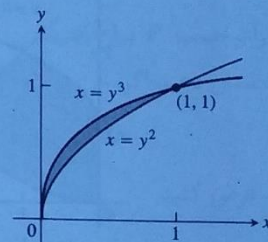
۲۹



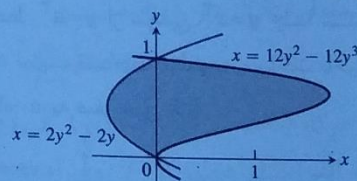
۳۱



۳۲

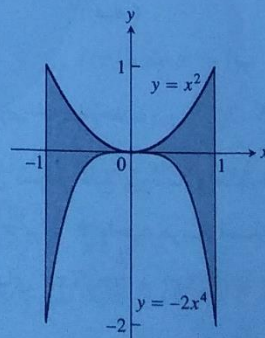
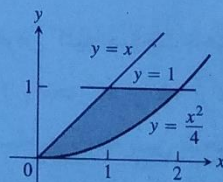


۳۳



۳۵

۳۴



مساحت ناحیه محدود به منحنی‌ها و خطوط داده شده در
تمرین‌های ۴۱ تا ۵۰ را بیابید.

۴۱. $y = 2$ و $y = x^2 - 2$ ۴۲. $y = -3$ و $y = 2x - x^2$

۴۳. $y = 8x$ و $y = x^4$ ۴۴. $y = x$ و $y = x^2 - 2x$

۴۵. $y = -x^2 + 4x$ و $y = x^2$ ۴۶. $y = -x^2 + 4$ و $y = 7 - 2x^2$

۴۷. $y = x^2$ و $y = x^4 - 4x^2 + 4$

۴۸. $y = 0$ و $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$

۴۹. $y = x + 6$ و $y = \sqrt{|x|}$ (چند نقطه برخورد وجود دارد؟)

۵۰. $y = (x^2/2) + 4$ و $y = |x^2 - 4|$

مساحت ناحیه محدود به خطوط و منحنی‌های داده شده در
تمرین‌های ۵۱ تا ۵۸ را پیدا کنید.

۵۱. $x = 2y^2$ و $x = 0$ و $y = 3$

۵۲. $x = y^2$ و $x = y + 2$

۵۳. $y^2 - 4x = 4$ و $4x - y = 16$

مختصات نقاط برخورد سهمی و خط چیست؟ آن را به نمودارتان اضافه کنید.

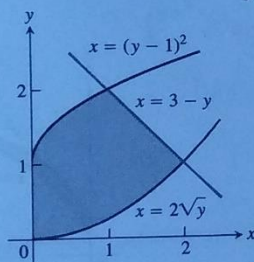
(ب) با انتگرال گیری نسبت به y ، c را پیدا کنید. (این c را یک کران انتگرال گیری قرار دهید).

(ج) با انتگرال گیری نسبت به x ، مقدار c را بیابید. (این c را به عنوان تابع انتگرال ده قرار دهید).

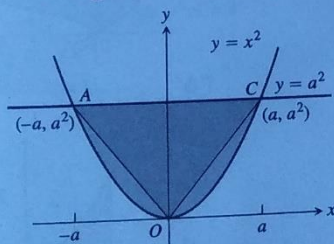
۷۶. مساحت ناحیه بین منحنی $y=3-x^2$ و خط $y=-1$ را با انتگرال گیری نسبت به (الف) x (ب) y پیدا کنید.

۷۷. مساحت ناحیه‌ای واقع در یک چهارم اول را بیابید که از چپ به محور y و از پایین به خط $y=x/4$ و از بالا سمت چپ به منحنی $y=1+\sqrt{x}$ و از بالا سمت راست به منحنی $y=2/\sqrt{x}$ محدود است.

۷۸. مساحت ناحیه‌ای در یک چهارم اول را بیابید که از چپ به محور y و از پایین به منحنی $x=2\sqrt{y}$ و از بالا سمت چپ به منحنی $x=(y-1)^2$ و از بالا سمت راست به خط $x=3-y$ محدود است.



۷۹. در اینجا شکل مثلث AOC نشان داده شده است که در ناحیه‌ای که توسط خط $y=a^2$ از سهمی $y=x^2$ جدا شده محاط شده است. حد نسبت مساحت مثلث به مساحت ناحیه سهمی را بیابید هرگاه a به صفر میل کند.



۸۰. فرض کنید مساحت ناحیه بین نمودار تابع پیوسته و مثبت f و محور x از $x=a$ تا $x=b$ برابر 4 واحد مربع است. مساحت ناحیه بین منحنی‌های $y=f(x)$ و $y=2f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ را پیدا کنید.

۸۱. نشان دهید به ازای همه مقادیر z ، مساحت ناحیه سایه‌دار برابر $1/6$ است.

$$54. x-y^2=0 \text{ و } x+2y^2=3$$

$$55. x=y^2-y \text{ و } x=2y^2-2y-6$$

$$56. x-y^{2/3}=0 \text{ و } x+y^4=2$$

$$57. x=y^2-1 \text{ و } x=|y|\sqrt{1-y^2}$$

$$58. x=y^3-y^2 \text{ و } x=2y$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های داده شده در تمرین‌های ۵۹ تا ۶۲ را پیدا کنید.

$$59. 4x^2+y=4 \text{ و } x^2-y=1$$

$$60. x^3-y=0 \text{ و } 2x^2-y=4$$

$$61. x+4y^2=4 \text{ و } x+y^2=1, x \geq 0$$

$$62. x+y^2=3 \text{ و } 4x+y^2=0$$

در تمرین‌های ۶۳ تا ۷۰، مساحت ناحیه محصور بین خطوط و منحنی‌های داده شده را پیدا کنید.

$$63. y=2\sin x \text{ و } y=\sin 2x, 0 \leq x \leq \pi$$

$$64. y=8\cos x \text{ و } y=\sec^2 x, -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

$$65. y=\cos(\pi x/2) \text{ و } y=1-x^2$$

$$66. y=\sin(\pi x/2) \text{ و } y=x$$

$$67. y=\sec^2 x \text{ و } y=\tan^2 x \text{ و } x=-\pi/4 \text{ و } x=\pi/4$$

$$68. -\pi/4 \leq y \leq \pi/4 \text{ و } x=-\tan^2 y \text{ و } x=\tan^2 y$$

$$69. 0 \leq y \leq \pi/2 \text{ و } x=0 \text{ و } x=3\sin y\sqrt{\cos y}$$

$$70. -1 \leq x \leq 1 \text{ و } y=x^{1/3} \text{ و } y=\sec^2(\pi x/3)$$

۷۱. مساحت ناحیه ملخی شکل محدود به منحنی $x-y^3=0$ و خط $x-y=0$ را پیدا کنید.

۷۲. مساحت ناحیه ملخی شکل محدود به منحنی $x-y^{1/3}=0$ و $x-y^{1/5}=0$ را پیدا کنید.

۷۳. مساحت ناحیه‌ای واقع در یک چهارم اول محدود به خطوط $y=x$ و $x=2$ و محور x و منحنی $y=1/x^2$ را بیابید.

۷۴. مساحت ناحیه مثلثی واقع در یک چهارم اول را بیابید که از چپ به محور y و از راست به منحنی‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ محدود است.

۷۵. ناحیه‌ای که از پایین به سهمی $y=x^2$ و از بالا به خط $y=4$ محدود است را با رسم خط $y=c$ به دو زیر ناحیه با مساحت برابر تقسیم می‌کنیم.

(الف) ناحیه و خط $y=c$ را چنان رسم کنید که به نظر برسد ناحیه به دو بخش با مساحت برابر تقسیم شده است.

۱۲۱ /

۲.۷ لگاریتم‌های طبیعی

$$۲.۵ \quad y = \theta(\sin(\ln \theta) + \cos(\ln \theta))$$

$$۲.۶ \quad y = \ln(\sec \theta + \tan \theta) \quad ۲.۷ \quad y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$$

$$۲.۸ \quad y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad ۲.۹ \quad y = \frac{1+\ln t}{1-\ln t}$$

$$۳.۰ \quad y = \sqrt{\ln \sqrt{t}} \quad ۳.۱ \quad y = \ln(\sec(\ln \theta))$$

$$۳.۲ \quad y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1+2 \ln \theta} \right) \quad ۳.۳ \quad y = \ln \left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$۳.۴ \quad y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}} \quad ۳.۵ \quad y = \int_{x^2/2}^2 \ln \sqrt{t} dt$$

$$۳.۶ \quad y = \int_{\sqrt{x}}^2 \ln t dt$$

محاسبه انتگرال‌ها

انتگرال در تمرین‌های ۳۷ تا ۵۴ را محاسبه کنید.

$$۳.۷ \quad \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} \quad ۳.۸ \quad \int_{-1}^0 \frac{3dx}{3x-2}$$

$$۳.۹ \quad \int \frac{2y dy}{y^2-25} \quad ۴.۰ \quad \int \frac{4r dr}{4r^2-5}$$

$$۴.۱ \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t} dt \quad ۴.۲ \quad \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin \theta}{1-\cos \theta} d\theta$$

$$۴.۳ \quad \int_1^2 \frac{2 \ln x}{x} dx \quad ۴.۴ \quad \int_2^4 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$۴.۵ \quad \int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad ۴.۶ \quad \int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$۴.۷ \quad \int \frac{3 \sec^2 t}{6+3 \tan t} dt \quad ۴.۸ \quad \int \frac{\sec y \tan y}{2+\sec y} dy$$

$$۴.۹ \quad \int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2} dx \quad ۵.۰ \quad \int_{\pi/2}^{\pi} \cot t dt$$

$$۵.۱ \quad \int_{\pi/2}^{\pi} 2 \cot \frac{\theta}{3} d\theta \quad ۵.۲ \quad \int_0^{\pi/12} 6 \tan 3x dx$$

$$۵.۳ \quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x+2x}} \quad ۵.۴ \quad \int \frac{\sec x dx}{\sqrt{\ln(\sec x + \tan x)}}$$

مشتق‌گیری لگاریتمی

در تمرین‌های ۵۵ تا ۶۸، با استفاده از مشتق‌گیری لگاریتمی مشتق y نسبت به متغیر مستقل داده شده را بیابید.

$$۵.۵ \quad y = \sqrt{x(x+1)} \quad ۵.۶ \quad y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$$

$$۵.۷ \quad y = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad ۵.۸ \quad y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$$

$$۵.۹ \quad y = \sqrt{\theta+3} \sin \theta \quad ۶.۰ \quad y = (\tan \theta) \sqrt{2\theta+1}$$

$$۶.۱ \quad y = t(t+1)(t+2) \quad ۶.۲ \quad y = \frac{1}{t(t+1)(t+2)}$$

$$۶.۳ \quad y = \frac{\theta+5}{\theta \cos \theta} \quad ۶.۴ \quad y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$$

اگر با محاسبه مستقیم و با استفاده از قوانین مشتق حاصل ضرب و خارج‌قسمت مثال ۵ را حل کنیم محاسبات بسیار طولانی‌تر است.

تمرین‌های ۲.۷

استفاده از ویژگی‌های جبری قضیه ۲

۱. لگاریتم‌های زیر را برحسب $\ln 2$ و $\ln 3$ بیان کنید.

$$\ln(1/2) \quad \text{الف} \quad \ln 0.75 \quad \text{ب} \quad \ln(4/9) \quad \text{ج} \quad \ln(1/2)$$

$$\ln \sqrt[3]{9} \quad \text{د} \quad \ln 2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \ln 3\sqrt{2} \quad \text{ه} \quad \ln \sqrt{13/5}$$

۲. لگاریتم زیر را برحسب $\ln 5$ و $\ln 7$ بیان کنید.

$$\ln(1/125) \quad \text{الف} \quad \ln 9/8 \quad \text{ب} \quad \ln 7\sqrt{7} \quad \text{ج}$$

$$\ln 1225 \quad \text{د} \quad \ln 0.056 \quad \text{و}$$

$$\ln(25) \quad \text{ه} \quad (\ln 35 + \ln(1/7)) / (\ln 25)$$

با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم عبارات تمرین‌های ۳ و ۴ را ساده کنید.

$$۳. \quad \ln(3x^2-9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) \quad \text{الف} \quad \ln \sin \theta - \ln\left(\frac{\sin \theta}{5}\right) \quad \text{ب}$$

$$\frac{1}{2} \ln(4t^4) - \ln 2 \quad \text{ج}$$

$$\ln \sec \theta + \ln \cos \theta \quad \text{الف} \quad \ln(8x+4) - 2 \ln 2 \quad \text{ب}$$

$$3 \ln \sqrt{t^2-1} - \ln(t+1) \quad \text{ج}$$

پیدا کردن مشتق

در تمرین‌های ۵ تا ۳۶، مشتق y نسبت به x یا θ (هر کدام مناسب است) را پیدا کنید.

$$۵. \quad y = \ln 2x \quad ۶. \quad y = \ln kx \quad (k \text{ ثابت})$$

$$۷. \quad y = \ln(t^2) \quad ۸. \quad y = \ln(t^{3/2})$$

$$۹. \quad y = \ln \frac{2}{x} \quad ۱۰. \quad y = \ln \frac{1}{x}$$

$$۱۱. \quad y = \ln(\theta+1) \quad ۱۲. \quad y = \ln(2\theta+2)$$

$$۱۳. \quad y = \ln x^2 \quad ۱۴. \quad y = (\ln x)^2$$

$$۱۵. \quad y = t(\ln t)^2 \quad ۱۶. \quad y = t\sqrt{\ln t}$$

$$۱۷. \quad y = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \quad ۱۸. \quad y = (x^2 \ln x)^4$$

$$۱۹. \quad y = \frac{\ln t}{t} \quad ۲۰. \quad y = \frac{1+\ln t}{t}$$

$$۲۱. \quad y = \frac{\ln x}{1+\ln x} \quad ۲۲. \quad y = \frac{x \ln x}{1+\ln x}$$

$$۲۳. \quad y = \ln(\ln x) \quad ۲۴. \quad y = \ln(\ln(\ln x))$$

$$۶۶. \quad y = \sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}} \quad ۶۷. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$$

$$۶۵. \quad y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}} \quad ۶۸. \quad y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$$

مثال ۷:

(الف)

$$\frac{d}{dx} \log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3x+1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+1)$$

$$= \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

$$\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2} \quad (\text{ب})$$

$$u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{\log_2 x}{x} dx = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \int u du$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2} + C$$

■

تمرین‌های ۳.۷

حل معادلات نمایی

در تمرین‌های ۱ تا ۴ با حل معادله، t را پیدا کنید.

$$e^{(\ln 2)t} = 0.4 \quad (\text{ج}) \quad e^{kt} = \frac{1}{2} \quad (\text{ب}) \quad e^{-0.7t} = 27 \quad (\text{الف}) \quad 1$$

$$e^{(\ln 2)t} = 1/2 \quad (\text{ج}) \quad e^{kt} = \frac{1}{10} \quad (\text{ب}) \quad e^{-0.01t} = 1000 \quad (\text{الف}) \quad 2$$

$$e^{\sqrt{t}} = x^2 \quad 3$$

$$e^{(x^2)} e^{(2x+1)} = e^t \quad 4$$

پیدا کردن مشتق

در تمرین‌های ۵ تا ۲۴، مشتق y نسبت به x ، t یا θ (هر کدام مناسب است) را پیدا کنید.

$$y = e^{-5x} \quad 5 \quad y = e^{2x/3} \quad 6$$

$$y = e^{5-7x} \quad 7 \quad y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)} \quad 8$$

$$y = xe^x - e^x \quad 9 \quad y = (1+2x)e^{-2x} \quad 10$$

$$y = (x^2 - 2x + 2)e^x \quad 11 \quad y = (9x^2 - 6x + 2)e^{2x} \quad 12$$

$$y = e^{\theta}(\sin \theta + \cos \theta) \quad 13 \quad y = \ln(2\theta e^{-\theta}) \quad 14$$

$$y = \cos(e^{-\theta^2}) \quad 15 \quad y = \theta^2 e^{-2\theta} \cos 5\theta \quad 16$$

$$y = \ln(2te^{-t}) \quad 17 \quad y = \ln(2e^{-t} \sin t) \quad 18$$

$$y = \ln \left[\frac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}} \right] \quad 19 \quad y = \ln \left[\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}} \right] \quad 20$$

$$y = e^{(\cos t + \ln t)} \quad 21 \quad y = e^{\sin t} \ln(t^2 + 1) \quad 22$$

$$y = \int_0^{\ln x} \sin e^t dt \quad 23 \quad y = \int_{e^2}^{e^x} \ln t dt \quad 24$$

در تمرین‌های ۲۵ تا ۲۸، dy/dx را پیدا کنید.

$$\ln xy = e^{x+y} \quad 26 \quad \ln y = e^y \sin x \quad 25$$

$$\tan y = e^x + \ln x \quad 28 \quad e^{2x} = \sin(x+2y) \quad 27$$

یافتن انتگرال

در تمرین‌های ۲۹ تا ۵۰، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\int (2e^x - 3e^{-2x}) dx \quad 30 \quad \int (e^{3x} + 5e^{-x}) dx \quad 29$$

$$\int_{-\ln 2}^0 e^{-x} dx \quad 32 \quad \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x dx \quad 31$$

$$\int 2e^{(x-1)} dx \quad 34 \quad \int 8e^{(x+1)} dx \quad 33$$

$$\int_0^{\ln 16} e^{x/2} dx \quad 36 \quad \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{x/2} dx \quad 35$$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} dr \quad 38 \quad \int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} dr \quad 37$$

$$\int t^3 e^{(t^2)} dt \quad 40 \quad \int 2te^{-t^2} dt \quad 39$$

$$\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3} dx \quad 42 \quad \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx \quad 41$$

$$\int_0^{\pi/4} (1+e^{\tan \theta}) \sec^2 \theta d\theta \quad 43$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+e^{\cot \theta}) \csc^2 \theta d\theta \quad 44$$

$$\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t dt \quad 45$$

$$\int e^{\csc(\pi+t)} \csc(\pi+t) \cot(\pi+t) dt \quad 46$$

$$\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^v \cos e^v dv \quad 47$$

$$\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2x e^{x^2} \cos(e^{x^2}) dx \quad 48$$

$$\int \frac{e^r}{1+e^r} dr \quad 49$$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} \quad 50$$

مسائل مقدار اولیه

در تمرین‌های ۵۱ تا ۵۴، مسائل مقدار اولیه را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin(e^t - 2), \quad y(\ln 2) = 0 \quad 51$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-t} \sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4) = 2/\pi \quad 52$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad 53$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 1 - e^{2t}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0 \quad 54$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{2 \ln 10 \log_{10} x}{x} dx & \quad ۱۰۰ \quad \int_1^4 \frac{\ln 2 \log_2 x}{x} dx & ۹۹ \\ \int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x} dx & \quad ۱۰۲ \quad \int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2} dx & ۱۰۱ \\ \int_2^3 \frac{2 \log_2(x-1)}{x-1} dx & \quad ۱۰۴ \quad \int_0^9 \frac{2 \log_{10}(x+1)}{x-1} dx & ۱۰۳ \\ \int \frac{dx}{x(\log_8 x)^2} & \quad ۱۰۶ \quad \int \frac{dx}{x \log_{10} x} & ۱۰۵ \end{aligned}$$

در تمرین‌های ۱۰۷ تا ۱۱۰، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \int_1^{e^x} \frac{1}{t} dt & \quad ۱۰۸ \quad \int_1^{\ln x} \frac{1}{t} dt, x > 1 & ۱۰۷ \\ \frac{1}{\ln a} \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0 & \quad ۱۱۰ \quad \int_1^{1/x} \frac{1}{t} dt, x > 0 & ۱۰۹ \end{aligned}$$

مشتق‌گیری لگاریتمی

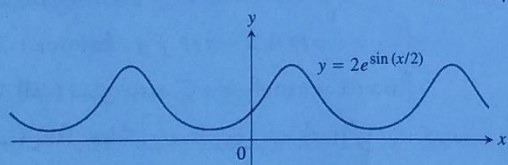
در تمرین‌های ۱۱۱ تا ۱۱۸، با استفاده از مشتق‌گیری لگاریتمی، مشتق y نسبت به متغیر مستقل داده شده را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} y = x^2 + x^{2x} & \quad ۱۱۲ \quad y = (x+1)^x & ۱۱۱ \\ y = t\sqrt{t} & \quad ۱۱۴ \quad y = (\sqrt{t})^t & ۱۱۳ \\ y = x^{\sin x} & \quad ۱۱۶ \quad y = (\sin x)^x & ۱۱۵ \\ y = (\ln x)^{\ln x} & \quad ۱۱۸ \quad y = \sin x^x & ۱۱۷ \end{aligned}$$

نظریه و کاربرد

۱۱۹. مقادیر کمینه و بیشینه مطلق $f(x) = e^x - 2x$ روی بازه $[0, 1]$ را بیابید.

۱۲۰. مکان و مقادیر فرینه تابع متناوب $f(x) = 2e^{\sin(x/2)}$ را پیدا کنید.



۱۲۱. فرض کنید $f(x) = xe^{-x}$.

(الف) همه مقادیر فرینه مطلق f را بیابید.

(ب) همه نقاط عطف f را بیابید.

۱۲۲. فرض کنید $f(x) = e^x / (1 + e^{2x})$.

(الف) همه مقادیر فرینه مطلق f را بیابید.

(ب) همه نقاط عطف f را بیابید.

۱۲۳. مقدار بیشینه مطلق $f(x) = x^2 \ln(1/x)$ را یافته و بگویید در کجا واقع است؟

مشتق‌گیری

در تمرین‌های ۵۵ تا ۸۲، مشتق y نسبت به متغیر مستقل داده شده را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} y = 3^{-x} & \quad ۵۶ \quad y = 2^x & ۵۵ \\ y = 2^{(s^2)} & \quad ۵۸ \quad y = 5\sqrt{s} & ۵۷ \\ y = t^{1-e} & \quad ۶۰ \quad y = x^\pi & ۵۹ \\ y = (\ln \theta)^\pi & \quad ۶۲ \quad y = (\cos \theta)^{\sqrt{2}} & ۶۱ \\ y = 3^{\tan \theta} \ln 3 & \quad ۶۴ \quad y = \sqrt{\sec \theta} \ln v & ۶۳ \\ y = 5^{-\cos 2t} & \quad ۶۶ \quad y = 2^{\sin 2t} & ۶۵ \\ y = \log_3(1 + \theta \ln 3) & \quad ۶۸ \quad y = \log_2 \delta \theta & ۶۷ \\ y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x} & \quad ۷۰ \quad y = \log_4 x + \log_4 x^2 & ۶۹ \\ y = \log_3 r \cdot \log_4 r & \quad ۷۲ \quad y = x^2 \log_{10} x & ۷۱ \\ y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{yx}{3x+2}\right)^{\ln 5}} & \quad ۷۴ \quad y = \log_3 \left[\frac{(x+1) \ln 3}{x-1} \right] & ۷۳ \\ y = \log_2 \left[\frac{\sin \theta \cos \theta}{e^{\theta/2}} \right] & \quad ۷۶ \quad y = \theta \sin(\log_2 \theta) & ۷۵ \\ y = \frac{\theta \delta^\theta}{2 - \log_5 \theta} & \quad ۷۸ \quad y = \log_{10} e^x & ۷۷ \\ y = 3 \log_8 (\log_2 t) & \quad ۸۰ \quad y = 2^{\log_2 t} & ۷۹ \\ y = t \log_2 (e^{(\sin t)(\ln 3)}) & \quad ۸۲ \quad y = \log_2 (8t^{\ln 2}) & ۸۱ \end{aligned}$$

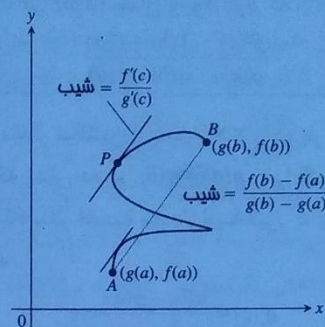
انتگرال‌گیری

در تمرین‌های ۸۳ تا ۹۲، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{3^x}{3-3^x} dx & \quad ۸۴ \quad \int \delta^x dx & ۸۳ \\ \int_{-2}^0 \delta^{-\theta} d\theta & \quad ۸۶ \quad \int_0^1 2^{-\theta} d\theta & ۸۵ \\ \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx & \quad ۸۸ \quad \int_1^{\sqrt{2}} x^2(x^2) dx & ۸۷ \\ \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t} \sec^2 t dt & \quad ۹۰ \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos t} \sin t dt & ۸۹ \\ \int \frac{x 2^{x^2}}{1+2^{x^2}} dx & \quad ۹۲ \quad \int_2^4 x^{2x} (1+\ln x) dx & ۹۱ \\ \int x^{\sqrt{2}-1} dx & \quad ۹۴ \quad \int 3x^{\sqrt{3}} dx & ۹۳ \\ \int_1^e x^{(\ln 2)-1} dx & \quad ۹۶ \quad \int_0^2 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}} dx & ۹۵ \\ \int_1^4 \frac{\log_2 x}{x} dx & \quad ۹۸ \quad \int \frac{\log_{10} x}{x} dx & ۹۷ \end{aligned}$$

در تمرین‌های ۹۳ تا ۱۰۶، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

است، معادله داده شده در قضیه مقدار میانگین کوشی می‌گویید شیب خط مماس برابر شیب این خط قاطع است. این تعبیر هندسی در شکل ۱۳.۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل ممکن است بیش از یک نقطه روی منحنی C وجود داشته باشد که خط مماس بر منحنی در آن نقطه موازی خط قاطع AB است.



شکل ۱۳.۷- مداخل یک نقطه مثل P روی منحنی C چنان وجود دارد که شیب خط مماس بر منحنی در P برابر با شیب خط قاطعی است که نقاط $A(g(a), f(a))$ و $B(g(b), f(b))$ را به هم وصل می‌کند.

اثبات قانون هوییتال: ابتدا معادله حدی را برای حالت $x \rightarrow a^+$ بیان می‌کنیم. در این روش، هنگام محاسبه حد وقتی $x \rightarrow a^-$ تقریباً لازم نیست که استدلال را تغییر دهیم. سپس با ترکیب این دو حالت با یکدیگر، اثبات قضیه کامل می‌شود.

فرض کنید x در سمت راست a قرار داشته باشد. آنگاه $g'(x) \neq 0$ و می‌توانیم قضیه مقدار میانگین کوشی را برای بازه بسته $[a, x]$ به کار ببریم. در این مرحله از فرآیند، عددی مثل c بین a و x چنان وجود دارد که

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

ولی $f(a) = g(a) = 0$. بنابراین

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

چون همواره c بین a و x است پس وقتی x به a میل می‌کند، c نیز به a میل می‌کند. بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

که درستی قضیه هوییتال را برای حالتی که x از راست به a میل می‌کند، ثابت می‌کند.

با استفاده از قضیه مقدار میانگین کوشی برای بازه بسته $[x, a]$ که $x < a$ می‌توان قاعده هوییتال را برای حالتی که x از چپ به a میل می‌کند، ثابت کرد. ■

تمرین‌های ۵.۷

پیدا کردن حد به دو روش

در تمرین‌های ۱ تا ۶، با استفاده از قاعده هوییتال حد را بیابید. سپس با استفاده از روشی که در فصل ۲ خواندید، حد را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} & ۲. \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2-4} & ۱. \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{4x^3-x-3} & ۴. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1} & ۳. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+x+1} & ۶. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} & ۵. \end{array}$$

به کار بردن قانون هوییتال

با استفاده از قانون هوییتال حدهای داده شده در تمرین‌های ۷ تا ۵۰ را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5} & ۸. \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} & ۷. \\ \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3-1}{4t^3-t-3} & ۱۰. \quad \lim_{t \rightarrow -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12} & ۹. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x} & ۱۲. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3-2x}{7x^3+3} & ۱۱. \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 5t}{2t} & ۱۴. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} & ۱۳. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} & ۱۶. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\cos x - 1} & ۱۵. \\ \lim_{\theta \rightarrow -\pi/3} \frac{3\theta + \pi}{\sin(\theta + (\pi/3))} & ۱۸. \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{2\theta - \pi}{\cos(2\pi - \theta)} & ۱۷. \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x - \sin \pi x} & ۲۰. \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin \theta}{1 + \cos 2\theta} & ۱۹. \\ \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\csc x)}{(x - (\pi/2))^2} & ۲۲. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)} & ۲۱. \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin t}{1 - \cos t} & ۲۴. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(1 - \cos t)}{t - \sin t} & ۲۳. \\ \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \tan x & ۲۶. \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x & ۲۵. \\ \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(1/2)^\theta - 1}{\theta} & ۲۸. \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3 \sin \theta - 1}{\theta} & ۲۷. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x^2 - 1} & ۳۰. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 x}{x^2 - 1} & ۲۹. \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_2 x}{\log_2(x+3)} & ۳۲. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x} & ۳۱. \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}} \quad ۶۸$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \quad ۶۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{\csc x} \quad ۷۰$$

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x} \quad ۶۹$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 4^x}{5^x - 2^x} \quad ۷۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{3^x + 4^x} \quad ۷۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}} \quad ۷۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{xe^x} \quad ۷۳$$

۷۵. کدام درست و کدام نادرست است؟ دلایل جوابتان را ارائه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{6} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0 \quad (\text{ب})$$

۷۶. کدام درست و کدام نادرست است؟ دلایل جوابتان را ارائه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2}{2x - \cos x} \quad (\text{الف})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2 + \sin x} = \frac{2}{2+0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 2}{2x - \cos x} = \frac{-2}{0-1} = 2 \quad (\text{ب})$$

۷۷. فقط یکی از این محاسبات درست است کدام یک؟ چرا بقیه نادرستند؟ دلایل جوابتان را ارائه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \cdot (-\infty) = -\infty \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1 \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} \quad (\text{د})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

۷۸. برای توابع و بازه‌های داده شده همه مقادیر ممکن c را

بیابید که شرایط قضیه مقدار میانگین کوشی را برآورده

می‌کنند.

$$f(x) = x, g(x) = x^2, (a, b) = (-2, 0) \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = x, g(x) = x^2, (a, b) \text{ دلخواه} \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = x^3/3 - 4x, g(x) = x^2, (a, b) = (0, 3) \quad (\text{ج})$$

۷۹. تعمیم پیوستگی: مقدار c را چنان بیابید که تابع زیر در

$x=0$ پیوسته شود.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x} \quad ۳۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 2x)}{\ln x} \quad ۳۳$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ay + a^2} - a}{y}, a > 0 \quad ۳۶$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5y + 25} - 5}{y} \quad ۳۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \ln \sin x) \quad ۳۸$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x - \ln(x+1)) \quad ۳۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{2x+1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] \quad ۴۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^2}{\ln(\sin x)} \quad ۳۹$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right] \quad ۴۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x) \quad ۴۲$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2} \quad ۴۴$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{e^\theta - \theta - 1} \quad ۴۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad ۴۶$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t} \quad ۴۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x \sin x} \quad ۴۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \tan x} \quad ۴۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x + x^2}{\sin x \sin 2x} \quad ۵۰$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\tan \theta - \theta} \quad ۴۹$$

صورت‌های مبهم توانی و ضربی

حدهای داده شده در تمرین‌های ۵۱ تا ۶۶ را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(x-1)} \quad ۵۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{1/(1-x)} \quad ۵۱$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} (\ln x)^{1/(x-e)} \quad ۵۴$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x} \quad ۵۳$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln x} \quad ۵۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-1/\ln x} \quad ۵۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x} \quad ۵۸$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+2x)^{1/(\sqrt{2} \ln x)} \quad ۵۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{1}{x} \right]^x \quad ۶۰$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad ۵۹$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2+1}{x+2} \right]^{1/x} \quad ۶۲$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+2}{x-1} \right]^x \quad ۶۱$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^2 \quad ۶۴$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln x \quad ۶۳$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x \quad ۶۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \tan \left[\frac{\pi}{2} - x \right] \quad ۶۵$$

نظریه و کاربرد

در تمرین‌های ۶۷ تا ۷۴ قانون هوییتال کمکی نمی‌کند. بکوشید از ابزار کردن خودداری کرده و حد را به روش دیگری پیدا کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{r dr}{\sqrt{4-(r+1)^2}} & .56 & \int \frac{r dr}{\sqrt{1-4(r-1)^2}} & .55 \\ \int \frac{dx}{1+(3x+1)^2} & .58 & \int \frac{dx}{2+(x-1)^2} & .57 \\ \int \frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}} & .60 & \int \frac{dx}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}} & .59 \\ \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\csc^2 x dx}{1+(\cot x)^2} & .62 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos \theta d\theta}{1+(\sin \theta)^2} & .61 \\ \int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4 dt}{t(1+\ln^2 t)} & .64 & \int_0^{\ln \sqrt{e}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} & .63 \\ \int \frac{\sec^2 y dy}{\sqrt{1-\tan^2 y}} & .66 & \int \frac{y dy}{\sqrt{1-y^4}} & .65 \end{aligned}$$

در تمرین‌های ۶۷ تا ۸۰، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} & .68 \times & \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} & .67 \\ \int_{1/2}^1 \frac{6 dt}{\sqrt{3+4t-4t^2}} & .70 & \int_{-1}^0 \frac{6 dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} & .69 \\ \int \frac{dy}{y^2+6y+10} & .72 & \int \frac{dy}{y^2-2y+5} & .71 \\ \int_2^4 \frac{2 dx}{x^2-6x+10} & .74 & \int_1^2 \frac{8 dx}{x^2-2x+2} & .73 \\ \int \frac{t-2}{t^2-6t+10} dt & .76 & \int \frac{x+4}{x^2+4} dx & .75 \\ \int \frac{t^2-2t^2+3t-4}{t^2+1} dt & .78 & \int \frac{x^2+2x-1}{x^2+9} dx & .77 \\ \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}} & .80 & \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}} & .79 \end{aligned}$$

در تمرین‌های ۸۱ تا ۹۰، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\cos^{-1} x} dx}{\sqrt{1-x^2}} & .82 & \int \frac{e^{\sin^{-1} x} dx}{\sqrt{1-x^2}} & .81 \\ \int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x} dx}{1+x^2} & .84 & \int \frac{(\sin^{-1} x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} & .83 \\ \int \frac{dy}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1-y^2}} & .86 & \int \frac{dy}{(\tan^{-1} y)(1+y^2)} & .85 \\ \int_{\sqrt{2}/\sqrt{3}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1} x) dx}{x\sqrt{x^2-1}} & .88 & \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x) dx}{x\sqrt{x^2-1}} & .87 \\ & & \int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)((\tan^{-1} \sqrt{x})^2+9)} dx & .89 \\ & & \int \frac{e^x \sin^{-1} e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx & .90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x & .16 & \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x & .15 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sec^{-1} x & .18 & \lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1} x & .17 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \csc^{-1} x & .20 & \lim_{x \rightarrow \infty} \csc^{-1} x & .19 \end{aligned}$$

پیدا کردن مشتق‌ها

در تمرین‌های ۲۱ تا ۴۲، مشتق y نسبت به متغیر مناسب را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} y = \cos^{-1}(1/x) & .22 & y = \cos^{-1}(x^2) & .21 \\ y = \sin^{-1}(1-t) & .24 & y = \sin^{-1} \sqrt{2t} & .23 \\ y = \sec^{-1} 5s & .26 & y = \sec^{-1}(2s+1) & .25 \\ y = \csc^{-1}(x^2+1), x > 0 & .27 & & \\ y = \sec^{-1} \frac{1}{t}, 0 < t < 1 & .29 & y = \csc^{-1} \frac{x}{2} & .28 \\ y = \cot^{-1} \sqrt{t} & .31 \checkmark & y = \sin^{-1} \frac{t}{t^2} & .30 \\ y = \ln(\tan^{-1} x) & .33 & y = \cot^{-1} \sqrt{t-1} & .32 \\ y = \csc^{-1}(e^t) & .35 & y = \tan^{-1}(\ln x) & .34 \\ y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s & .37 & y = \cos^{-1}(e^{-t}) & .36 \\ y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s & .38 & & \\ y = \tan^{-1} \sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, x > 1 & .39 & & \\ y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} & .41 & y = \cot^{-1} \frac{1}{x} - \tan^{-1} x & .40 \\ y = \ln(x^2+4) - x \tan^{-1}(\frac{x}{y}) & .42 \checkmark & & \end{aligned}$$

محاسبه انتگرال‌ها

در تمرین‌های ۴۳ تا ۶۶، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} & .44 & \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} & .43 \\ \int \frac{dx}{9+3x^2} & .46 \times & \int \frac{dx}{17+x^2} & .45 \\ \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}} & .48 & \int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}} & .47 \\ \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}} & .50 \checkmark & \int_0^1 \frac{4 ds}{\sqrt{4-s^2}} & .49 \\ \int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2} & .52 & \int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2} & .51 \\ \int_{-\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/3} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}} & .54 \checkmark & \int_{-1}^{-\sqrt{2}/2} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}} & .53 \end{aligned}$$

قانون هویتنال

در تمرین‌های ۹۱ تا ۹۸، حد‌ها را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sec^{-1} x} \quad .92$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x} \quad .91$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan^{-1} 2x^2}{\sqrt{x^2}} \quad .94$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan^{-1} \frac{2}{x} \quad .93$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x \tan^{-1} e^x}{e^{2x} + x} \quad .96$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} x^2}{x \sin^{-1} x} \quad .95$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^{-1} x^2}{(\sin^{-1} x)^2} \quad .98$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\tan^{-1} \sqrt{x})^2}{x \sqrt{x+1}} \quad .97$$

پیدا کردن مشتق

در تمرین‌های ۱۳ تا ۲۴، مشتق y را نسبت به متغیر مناسب پیدا کنید.

$$y = \frac{1}{y} \sinh(2x+1) \quad ۱۴$$

$$y = 6 \sinh \frac{x}{3} \quad ۱۳$$

$$y = t^2 \tanh \frac{1}{t} \quad ۱۶$$

$$y = 2\sqrt{t} \tanh \sqrt{t} \quad ۱۵$$

$$y = \ln(\cosh z) \quad ۱۸$$

$$y = \ln(\sinh z) \quad ۱۷$$

$$y = \operatorname{sech} \theta (1 - \ln \operatorname{sech} \theta) \quad ۱۹$$

$$y = \operatorname{csch} \theta (1 - \ln \operatorname{csch} \theta) \quad ۲۰$$

$$y = \ln \cosh v - \frac{1}{y} \tanh^2 v \quad ۲۱$$

$$y = \ln \sinh v - \frac{1}{y} \coth^2 v \quad ۲۲$$

$$y = (x^2 + 1) \operatorname{sech}(\ln x) \quad ۲۳$$

(راهنمایی: پیش از مشتق‌گیری، عبارت را بر حسب تابع نمایی بیان کرده و آن را ساده کنید.)

$$y = (4x^2 - 1) \operatorname{csch}(\ln 2x) \quad ۲۴$$

در تمرین‌های ۲۵ تا ۳۶، مشتق y را نسبت به متغیر مناسب پیدا کنید.

$$y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1} \quad ۲۶$$

$$y = \sinh^{-1} \sqrt{x} \quad ۲۵$$

$$y = (1-\theta) \tanh^{-1} \theta \quad ۲۷$$

$$y = (\theta^2 + 2\theta) \tanh^{-1}(\theta+1) \quad ۲۸$$

$$y = (1-t^2) \coth^{-1} t \quad ۳۰$$

$$y = (1-t) \coth^{-1} \sqrt{t} \quad ۲۹$$

$$y = \cos^{-1} x - x \operatorname{sech}^{-1} x \quad ۳۱$$

$$y = \ln x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{sech}^{-1} x \quad ۳۲$$

$$y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta \quad ۳۴$$

$$y = \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{1}{y}\right)^\theta \quad ۳۳$$

$$y = \sinh^{-1}(\tan x) \quad ۳۵$$

$$y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \pi/2 \quad ۳۶$$

فصل هفتم: توابع متعالی

۱۶۰

محاسبه انتگرال‌ها

در تمرین‌های ۴۱ تا ۶۰، انتگرال‌ها را محاسبه کنید.

$$\int \sinh \frac{x}{5} dx \quad ۴۲$$

$$\int \sinh 2x dx \quad ۴۱$$

$$\int 4 \cosh(2x - \ln 2) dx \quad ۴۴$$

$$\int 6 \cosh\left(\frac{x}{y} - \ln 3\right) dx \quad ۴۳$$

$$\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} d\theta \quad ۴۶$$

$$\int \tanh \frac{x}{y} dx \quad ۴۵$$

$$\int \operatorname{csch}^2(5-x) dx \quad ۴۸$$

$$\int \operatorname{sech}^2\left(x - \frac{1}{y}\right) dx \quad ۴۷$$

$$\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t) dt}{t} \quad ۵۰$$

$$\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t} dt}{\sqrt{t}} \quad ۴۹$$

$$\int_0^{\ln 2} \tanh 2x dx \quad ۵۲$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x dx \quad ۵۱$$

$$\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta d\theta \quad ۵۴$$

$$\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^\theta \cosh \theta d\theta \quad ۵۳$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta d\theta \quad ۵۵$$

$$\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta d\theta \quad ۵۶$$

$$\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad ۵۸$$

$$\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} dt \quad ۵۷$$

$$\int_0^{\ln 10} 2 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad ۶۰$$

$$\int_{-\ln 2}^0 \cosh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx \quad ۵۹$$